ვეკუას მათემატიკის თასი

II ტური

სერია II (VII-VIII-IX კლასი)

თარიღი: 26.04.2025

ხანგრძლივობა: 4 სთ

ამოცანა 1 **(5 ქულა)**

რამდენი რიცხვია 2025-ზე ნაკლები, ისეთი რომ იყოფოდეს ან 3-ზე ან 4-ზე, მაგრამ არ იყოფოდეს 5-ზე?

ამოცანა 2 **(5 ქულა)**

დაამტკიცეთ, რომ თუ a,b,c არიან მთელი დადებითი რიცხვები, ჩამოთვლილთაგან სამივე ვერ იქნება ნატურალური რიცხვის კვადრატი:

1) $a^2 + b + c$ 2) $b^2 + c + a$ 3) $c^2 + a + b$

ამოცანა 3 **(5 ქულა)**

მოცემულია მართკუთხა სამკუთხედი ABC ($\angle ACB = 90^\circ$). D და E არიან შესაბამისად A და B კუთხეების ბისექტრისების კვეთა გვერდებთან. N და M არიან შესაბამისად D და E წერტილებიდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებული მართობების ფუძეები. დაამტკიცეთ რომ $\angle MCN = 45^\circ$.

ამოცანა 4 **(5 ქულა)**

იპოვეთ შემდეგი განტოლების ამონახსნი, რომელშიც a არის რაღაც პარამეტრი:

$$\left(x^2 + 1\right)(x - 1)^2 - ax^2 = 0$$

ამოცანა 5 **(5 ქულა)**

$ABCD$ არის ციკლური ოთხკუთხედი (ოთხკუთხედი, რომელზეც წრეწირი შემოიხაზება), ისეთი რომ $DA < AB = BC < CD$. E და F წერტილები არიან ისე აღებული შესაბამისად CD და AB გვერდებზე, რომ $BE \perp AC$ და $EF \parallel BC$. დაამტკიცეთ რომ $FB = FD$.

ვეკუას მათემატიკის თასი — თარიღი: 26.04.2025

II ტური

სერია I (X-XI-XII კლასი) — ხანგრძლივობა: 4 სთ

ამოცანა 1 **(5 ქულა)**

იპოვეთ ყველა ნატურალურ რიცხვთა (n,d) წყვილი, ისეთი რომ d ჰყოფს n^2-ს და $(n-d)^2 < 2d$

ამოცანა 2 **(5 ქულა)**

იპოვეთ ყველა ისეთი ნამდვილი a და b რიცხვები, რომ მოცემულ კვადრატულ სამწევრებს:

$$x^2 + bx + a \quad \text{და} \quad x^2 + ax + b$$

ჰქონდეთ 2-2 ფესვი, მაგრამ მათ ნამრავლს ზუსტად სამი ფესვი.

ამოცანა 3 **(5 ქულა)**

მოცემულია სამკუთხედი ABC, რომელშიც $AB < AC$. D არის BC-ზე, ისე რომ AD არის $\angle BAC$-ის ბისექტრისა. E არის BC-ზე, ისე რომ $AB = AE$. Fარის BC-ზე, ისე რომ $BD = DF$. G არის AC-ზე, ისე რომ $AB = AG$. დაამტკიცეთ, რომ EFG სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირი ეხება AC-ს.

ამოცანა 4 **(5 ქულა)**

მოცემულია $n \geq 3$ მთელი დადებითი რიცხვი და წესიერი n-კუთხედი. ამ ფიგურის წვეროებს მონაცვლეობით აფერადებენ ნიკა და თორნიკე. დასაწყისში ფიგურის არცერთი წვერო არ არის გაფერადებული და ორივეს აქვს 0 ქულა, მათ ასევე არ შეუძლიათ უკვე გაფერადებული წვეროს გაფერადება.

რომელიმე წვეროს გაფერადების შემდეგ, მათ ემატებათ იმდენი ქულა, რამდენი გაფერადებული მეზობელიც ჰყავდა ამ წვეროს. გაფერადებას ამთავრებენ, თუ ყველა წვერო გაფერადდა და ვისაც მეტი ქულა ექნება ის ხდება გამარჯვებული. თუ ვიცით, რომ გაფერადებას იწყებს ნიკა, იპოვეთ რომელი n-ისთვის რომელი მოიგებს თუ ორივენი ოპტიმალურად აფერადებენ. (თუ ტოლი რაოდენობის ქულები ექნებათ, ისინი ფრედ დაამთავრებენ).

ამოცანა 5 **(5 ქულა)**

BC იყოს Γ წრეწირის ქორდა და A წერტილი იყოს წრეწირის შიგნით ისე, რომ $\angle BAC$ იყოს მახვილი. ABC სამკუთხედის გარეთ აგებულია ACP და ABR ტოლფერდა სამკუთხედები ისე, რომ $\angle ACP$ და $\angle ABR$ მართი კუთხეებია. დავუშვათ BA და CA კვეთენ Γ-ს ხელახლა E და F წერტილებში შესაბამისად. EP და FR წრფეები წრეწირს ხელახლა კვეთდეს შესაბამისად X და Y წერტილებში. დაამტკიცეთ, რომ $BX = CY$.