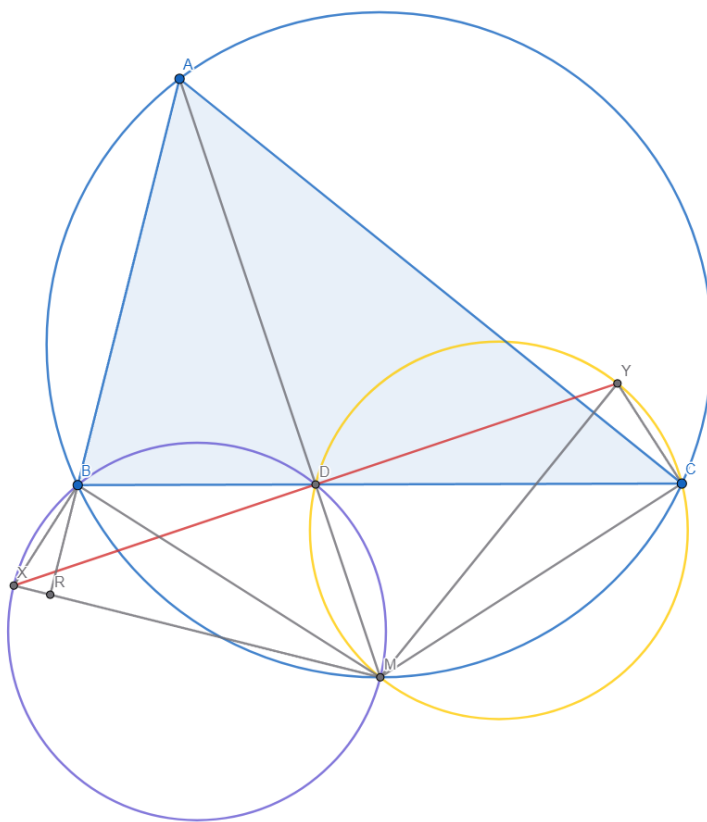


ამოცანა 1

R იყოს AB წრფის კვეთა XM წრფესთან და $\angle BAC \equiv 2\alpha$.

პირობის თანახმად $\angle DMX = \angle AMR = 90^\circ - \angle RAM = 90^\circ - \alpha$, მაგრამ $\angle XBD = \angle XBM + \angle MBC = 90^\circ + \angle MAC = 90^\circ + \alpha = 180^\circ - \angle DMX$. ანუ ოთხკუთხედი $BXDM$ ციკლურია. ანალოგიურად $MDYC$ -ც ციკლური ოთხკუთხედი.

$$\angle XDY = \angle XDM + \angle MDY = \angle XBM + (180^\circ - \angle MCY) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \implies X, D, Y \text{ ერთ წრფეზე არიან}$$



ამოცანა 2

$$n! = 2^a + 3^b + 5^c \geq 2 + 3 + 5 = 10 > 3! \implies n \geq 4$$

თუ $n = 4$, მაშინ $24 = 2^a + 3^b + 5^c \geq 2 + 3 + 5^c = 5 + 5^c \implies c = 1$. ახლა $19 = 2^a + 3^b \geq 2 + 3^b \implies b \leq 2$. თუ $b = 2$ ვიღებთ $10 = 2^a$ რაც შეუძლებელია, ხოლო როდესაც $b = 1$ ვიღებთ $16 = 2^a \implies a = 4$. ანუ მივიღეთ რომ $(a, b, c, n) = (4, 1, 1, 4)$ არის ერთ-ერთი ამონახსნი. ახლა ვაჩვენებთ რომ მეტი ამონახსნი არ გვაქვს.

ამოხსნა 1:

თუ $a = 1$, მაშინ $3^b + 5^c \equiv 6 \pmod{8}$, ანუ b ლუწია და c კენტი. ხუთზე განაშთვით მარჯვენა მხარე ნულდება, მაგრამ მარცხენა მხარეს გვაქვს $3^b + 5^c \equiv 3 \pmod{5}$.

თუ $a = 2$, მაშინ $3^b + 5^c \equiv 4 \pmod{8}$, ანუ b კენტია და c ლუწი. ხუთზე განაშთვით კი მარჯვენა მხარე ნულდება, მაგრამ მარცხენა მხარეს გვაქვს $3^b + 5^c \equiv 1 \pmod{5}$.

თუ $a \geq 3$, მაშინ $3^b + 5^c \equiv 0 \pmod{8}$, ანუ b და c ორივე კენტები არიან, მაგრამ ახლა გვაქვს

$$2^a + 5^c \equiv 0 \pmod{3}$$

$$2^a + 3^b \equiv 0 \pmod{5}$$

პირველი განტოლება გვადლევს რომ a ლუწია, მაგრამ მეორე გვადლევს რომ a კენტია.

ამოხსნა 2:

რადგან მარცხენა მხარე იყოფა 120-ზე, მაშინ მარჯვენა მხარეც უნდა გაიყოს 120-ზე. ახლა ჩამოვწეროთ მარცხნივ მყოფი რიცხვების ნაშთები 120-ზე:

$$2^a \pmod{120} \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$$

$$3^b \pmod{120} \in \{1, 3, 9, 27, 81\}$$

$$5^c \pmod{120} \in \{1, 5, 25\}$$

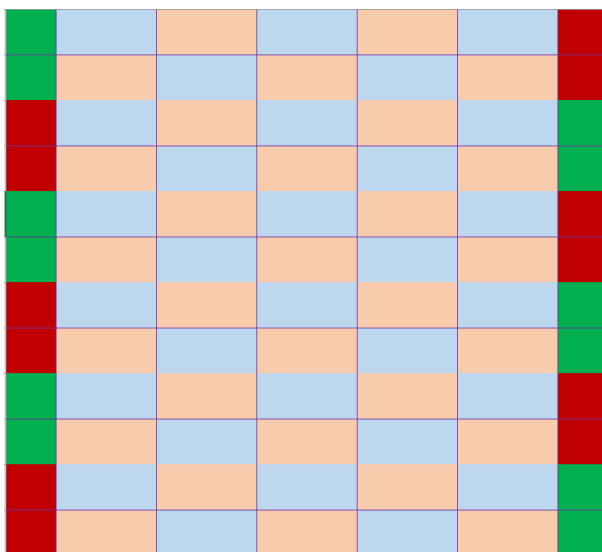
აქედან კი ვხედავთ რომ ვერანაირი კომბინაცია ვერ გვადლევს ჯამს 120-ის ჯერადს.

ამოცანა 3

წრფეები მონაკვეთები, რომლებიც 2×2 -ზე კვადრატის შიგნით არიან გავაფერადოთ იასამნისფრად. ეს გაფერადება დაყოფს დაფას კიდეებში 1×2 დომინოებით, 2×2 კვადრატებით ცენტრში და 1×1 კვადრატებით კუთხეებში. დომინოს რომელიც კვეთს იასამნისფერ წრფეს დავარქვათ ცუდი. ჩვენ ამოცანა გვთხოვს ცუდი დომინოების მინიმუზაციას.

კუთხეში დადებული დომინო გადაკვეთს იასამნისფერ წრფეს და სხვა ფიგურის ფართობს შეამცირებს ერთით. რადგან არა წვეროში მყოფ ფიგურებს აქვთ ლუწი ფართობი, ამ ფიგურის ფართობი გახდება კენტი და ანალოგიური მიზეზით მოგვიწევს დავდოთ ცუდი დომინო. შევამჩნიოთ რომ ცუდი დომინოების მიმდევრობა თუ დამთავრდა, მიმდევრობაში ბოლო დომინოს გადავყავართ კენტი ფართობის მქონე ფიგურიდან მეორე კენტი ფიგურის ფართობში, მაგრამ კენტი ფართობი მხოლოდ წვეროებს აქვთ. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია მივუყვებთ ცუდ დომინოებს ერთი წვეროდან და დავამთავრებთ გზას სხვა წვეროში. აქედან გამომდინარე ჩვენი დავალებაა ორ წვეროს შორის გზის მინიმუზაცია რაც პირდაპირი სვეტია.

აქედან გამომდინარე პასუხი არის 100 (ნაჩვენებია მაგალითი 12×12 დაფის, სადაც ერთი და იგივე ფერის მეზობელ უჯრებზე დევს დომინო, წითელ-მწვანე დომინოები არიან ცუდი, ხოლო ცისფერ-ყვითელი არა ცუდი).



ამოცანა 4

ა პუნქტის ამოხსნა:

შევამჩნიოთ, რომ თუ a_n არის ლუწი, მაშინ $a_0 a_1 \dots a_{n-1} = a_n - 2$, ანუ მოიძებნება $i < n$, ისეთი რომ a_i -იც იყოს ლუწი. შეგვიძლია ანალოგიური გავიმეოროთ i -ზე და საბოლოოდ ჩავალთ $a_0 = 3$ -თან, აქედან გამომდინარე მიმდევრობის ყველა წევრი არის კენტი.

დავუშვათ, რომ რომელიმე ორი მომდევნო წევრი არ არის ურთიერთმარტივი, ვთქვათ a_n და a_{n+1} . ვთქვათ მათი საერთო გამყოფი არის d . დაშვების თანახმად $d \mid a_{n+1} = 2 + a_n \cdot a_0 a_1 \dots a_{n-1} \implies d \mid 2 \implies d = 2$, მაგრამ ეს ეწინააღმდეგება მათ კენტობას.

ბ პუნქტის ამოხსნა:

$$a_{n+1} - a_n = 2 + a_0 a_1 \dots a_n - 2 - a_0 a_1 \dots a_{n-1} = a_0 a_1 \dots a_{n-1} (a_n - 1) = (a_n - 2)(a_n - 1)$$

ფრიჩილების გახსნითა და გადანაცვლებით მიიღება:

$$a_{n+1} - 1 = a_n^2 - 2a_n - 1 = (a_n - 1)^2 = (a_{n-1} - 1)^4 = \dots = (a_0 - 1)^{2^n} = 2^{2^n}$$

$$a_{2025} = 2^{2^{2025}} + 1$$

ამოცანა 5

x ღერძის პარალელურ წრფეს y კოორდინატით დავარქვათ l_y . თუ $y_1 > y_2$, მაშინ ვთქვათ რომ l_{y_1} არის l_{y_2} -ის თავზე, ხოლო l_{y_2} არის l_{y_1} -ის ქვევით. წერტილი A -ს ანალოგიური წერტილი, არის წერტილი იგივე x კოორდინატით.

ა პუნქტის ამოხსნა:

დავუშვათ საწინააღმდეგო და ვთქვათ არ მოიძებნება სასურველი მართკუთხედი დავაკვირდეთ წერტილებს l_1 და l_2 წრფეებზე. შევამჩნიოთ, რომ თუ l_2 -ზე 3 ისეთი წერტილი, რომ ზუსტად მათ ქვევით მყოფი წერტილები l_1 -ზე არიან იგივე ფერის, მაშინ დირიხლეს პრინციპით შეგვიძლია შევკრათ სასურველი მართკუთხედი. აქედან გამომდინარე ორ მომდევნო წრფეზე გვაქვს მაქსიმუმ ორი ისეთი წერტილი, რომ მათ ქვევითაც (ან ზევითაც) იყვნენ იგივე ფერის წერტილები. რადგან, მაქსიმუმ ორი წერტილი რჩება იგივე ფერის l_1 -დან l_2 -ზე გადასვლისას, მოიძებნება უსასრულო რაოდენობის ერთი და იგივე ფერის წერტილი, ისეთი რომ ფერი შეეცვალათ l_1 -დან l_2 -ზე გადასვლისას. მათ შორის, მაქსიმუმ ორი წერტილი მოიძებნება, რომლების ანალოგიური წერტილებიც l_3 -ზე იქნებიან იგივე ფერის, ანუ l_2 -დან l_3 -ზე გადასვლისას უსასრულოდ ბევრი შეიცვლის ფერს. აქედან გამომდინარე მოიძებნება უსასრულოდ ბევრი წერტილი l_1 -ზე, რომელთა ანალოგიური წერტილები იქნებიან იგივე ფერის l_3 -ზე და შევძლებთ იგივე ფერის მართკუთხედის შეკვრას.

ბ პუნქტის ამოხსნა:

ჯაჭვი დავუმახოთ იმ წერტილთა მიმდევრობას, რომლებიც არიან ერთმანეთის მომდევნოდ განლაგებული x ღერძის პარალელურ წრფეზე, არიან ერთი და იგივე ფერის და რაოდენობა აღემატება ერთს. თუ ჯაჭვი არ მოიძებნება, მაშინ ყოველი მომდევნო წერტილი სხვა და სხვა ფერისაა, აქედან გამომდინარე შეგვიძლია ავიღოთ წერტილები კოორდინატებით (x, y) ; $(x + 2, y)$ და $(x, y + 2)$, რომლებიც შეკრავენ ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედს.

დავუშვათ საწინააღმდეგო და არ მოიძებნებოდეს ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი. ვთქვათ გვაქვს ჯაჭვი l_n წრფეზე, მაშინ მათი შესაფერისი წერტილები l_{n+1} წრფეზე უნდა იყვნენ განსხვავებული ფერის, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვექნება ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი, აქედან გამომდინარე კონკრეტული ფერის ჯაჭვის ზევით გვექნება ანალოგიური ჯაჭვი საპირისპირო ფერის.

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ავარჩიოთ ისეთი ჯაჭვი, რომ ან მარცხნივ ან მარჯვნივ მოეძებნებოდეს წერტილი არა ამ ჯაჭვში, რომელსაც ექნება იგივე ფერი. ამ წერტილს დავარქვათ X და ავიღოთ რაღაც წერტილი ჯაჭვიდან სახელით A .

თუ მანძილი X -სა და A -ს შორის არის კენტი რიცხვი d , მაშინ ავიღოთ წერტილი A -ს ანალოგიური წერტილი l_{n+d} წრფეზე სახელიად Y . შევამჩნიოთ რომ A წერტილი არის X -სა და Y -ისგან d მანძილით დაშორებული, და რადგან

$X \in l_n$ და Y არის A -ს ანალოგიური, გვაქვს რომ $\angle XAY = 90^\circ$, ანუ XAY არის ტოლფერდა მართკუთხა სამკუთხედი რაც დაშვებას ეწინააღმდეგება.

თუ მანძილი X -სა და A -ს შორის არის ლუწი, მაშინ ავიღოთ A -ს მეზობელი წერტილი ჯაჭვში სახელად B და გავიმეოროთ ანალოგიური ლოგიკა.

ამოცანა 6

H იყოს DEF სამკუთხედის ორთოცენტრი.

ლემა 1: ω იყოს წრეწირი დიამეტრით OC , მაშინ ω არის სამკუთხედ PEF -ის ცხრა წერტილის წრეწირი (https://en.wikipedia.org/wiki/Nine-point_circle)

• პარალელოგრამობის გამო $SP = OC$, ანუ PEF სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის რადიუსი არის ორჯერ მეტი ω -ს რადიუსზე.

• O არის EF მონაკვეთის შუაწერტილი.

• $EF \perp OS \parallel PC \implies O$ -ს დიამეტრიული წერტილი ω -ში არის PEF სამკუთხედის P -დან დაშვებულ სიმაღლეზე.

ეს სამი პუნქტი ერთად გვადლევს სასურველს.

ლემა 2: AC არის $\angle BAD$ -ის ბისექტრისა.

რადგან $\angle OMC = 90^\circ = \angle ONC$, ჩვენ გვაქვს რომ $M, N \in \omega$. ამასთანავე M არის FP წრფეზე, ანუ M არის HEF სამკუთხედში F -დან სიმაღლის ფუძე, ანალოგიურად N -იც.

აქედან გამომდინარე O არის $EFNM$ ციკლურ ოთხკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, ანუ $OM = ON$. რადგან BOC და COD სამკუთხედები არიან ტოლფერდა და აქვთ ტოლი სიმაღლეები, ვიღებთ რომ არიან ტოლი სამკუთხედები. აქედან გამომდინარე $BC = CD$, ანუ C არის BD რკალის შუაწერტილი.

ლემა 3: $CA \parallel OP$.

W იყოს HEF სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი, მაშინ:

$$\begin{aligned} \angle EAF &= \angle BAD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - \angle MCN = \angle MON = 2 \cdot \\ \angle MFN &= 180^\circ - 2 \cdot \angle EHF = 180^\circ - \angle EWF \end{aligned}$$

ანუ $AEFW$ ციკლურია. რადგან $WE = WF$ გვაქვს რომ AW არის $\angle EAF$ -ის ბისექტრისა. ამას დამატებული ლემა 2 გვადლევს რომ A, W, C არიან ერთ წრეზე. ცნობილი ფაქტია რომ $OW = \frac{PH}{2} = PC$, მაგრამ $OW \perp EF \perp PC \implies OWCP$ პარალელოგრამია.

$OP \parallel AC \perp \angle RAQ$ -ის ბისექტრისასი, ანუ RAQ სამკუთხედი ტოლფერდაა $\implies AR = AQ$.

