VII-IX კლასის ამოცანები

ამოცანა 1

ყველა რიცხვი რომელიც 3-ზე იყოფა და არის 2025-ზე ნაკლები არის : $[\frac{2025}{3}] = 675$

ყველა რიცხვი რომელიც 4-ზე იყოფა და არის 2025-ზე ნაკლები არის : $[\frac{2025}{4}] = 506$

რადგან რიცხვი არ უნდა იყოფოდეს 12-ზე, გვაქვს რომ რიცხვები რომლებიც იყოფა ან 3-ზე ან 4 -ზე არის :

$$[\frac{2025}{3}] + [\frac{2025}{4}] - 2 \cdot [\frac{2025}{12}] = 675 + 506 - 2 \cdot 168 = 845$$

რადგან რიცხვი არ უნდა იყოფოდეს 5-ზე, თუ ის იყოფა 3-ზე არ უნდა იყოფოდეს 15-ზე, ასეთი რიცხვების რაოდენობაა : $[\frac{2025}{15}] = 135$

ანალოგიურად არ უნდა იყოფოდეს 20-ზე, რაც გვაძლევს : $[\frac{2025}{20}] = 101$

ანუ ამ სიიდან, იმ რიცხვების რაოდენობა რომლებიც იყოფა 5-ზე არის :

$$[\frac{2025}{15}] + [\frac{2025}{20}] - 2 \cdot [\frac{2025}{60}] = 135 + 101 - 2 \cdot 33 = 170$$

ანუ სასურველ რიცხვთა რაოდენობა არის : $845 - 170 = 675$

ამოცანა 2

ამოხსნა 1:

დავუშვათ საწინააღმდეგო და სამივე იყოს სრული კვადრატი.
შევამჩნიოთ რომ $a^2 + b + c > a^2$, აქედან გამომდინარე

$$a^2 + b + c \geq (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 \Longrightarrow b + c \geq 2a + 1$$

$$b^2 + a + c \geq (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1 \Longrightarrow a + c \geq 2b + 1$$

$$c^2 + a + b \geq (c+1)^2 = c^2 + 2c + 1 \Longrightarrow a + b \geq 2c + 1$$

სამივე უტოლობის აჯამვით ვიღებთ:

$$2(a + b + c) \geq 2(a + b + c) + 3 \Longrightarrow 0 \geq 3 \text{ რაც აბსურდია}$$

ამოხსნა 2:

დავუშვათ საწინააღმდეგო და სამივე იყოს სრული კვადრატი. ზოგადობის დაურღვევლად $a \geq b \geq c$, მაშინ რადგან $a^2 + b + c > a$, გვაქვს რომ

$$a^2+b+c \geq (a+1)^2 = a^2+2a+1 \Longrightarrow 2a+1 \leq b+c \leq a+a = 2a \text{ რაც აბსურდია}$$

ამოცანა 3

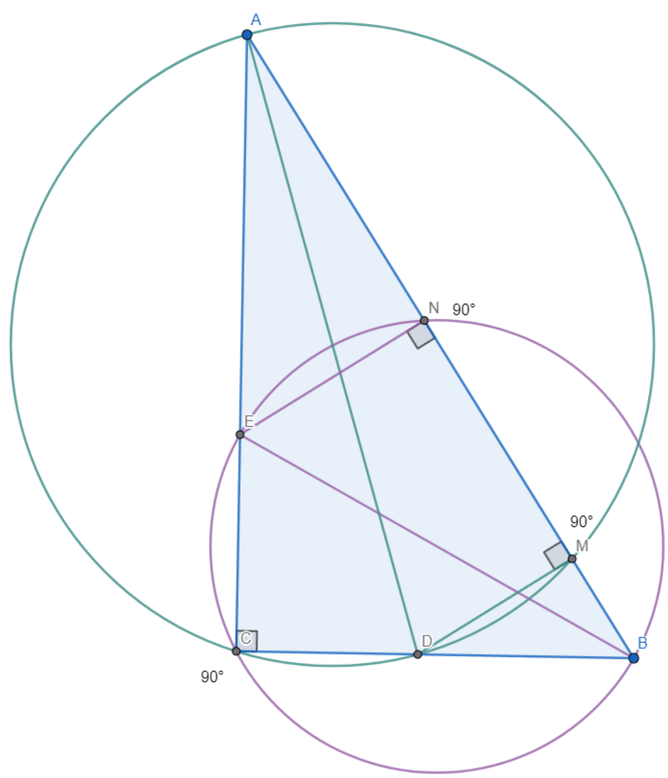
შევამჩნიოთ რომ $\angle ENB = 90^\circ = \angle ECB$, ანუ ECB-ზე და ENB-ზე შემოხაზულ წრეწირებს აქვთ ერთი და იგივე დიამეტრები, აქედან გამომდინარე $ECBN$ ოთხკუთხედზე შემოიხაზება წრეწირი. ანალოგიურად $AMDC$-ც ციკლურია.

ვთქვათ $\angle BAC = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$ მაშინ :

$$\angle ACM = \angle ADM = 90^\circ - \alpha \qquad \angle NCB = \angle NEB = 90^\circ - \beta$$

$$\angle NCM = \angle ACM + \angle NCB - 90^\circ = \alpha + \beta = 45^\circ$$

ვთქვათ $\angle BAC = \alpha$.



ამოცანა 4

პირობის თანახმად

$$(x^2+1)(x^2-2x+1)=ax^2$$

გავყოთ ორივე მხარე x^2-ზე, ვიღებთ:

$$(x+\frac{1}{x})(x-2+\frac{1}{x})=a$$

ავიღოთ $y=x+\frac{1}{x}$, განტოლებიდან ვღებულობთ:

$$y^2-2y-a=0 \Longrightarrow y=1\pm\sqrt{1+a}$$

ამის შემდეგ $y=x+\frac{1}{x}$ ჩანაცვლებით გვაქვს:
$1\pm\sqrt{1+a}=x+\frac{1}{x}$, შემდეგ შევამჩნიოთ რომ თუ $1\pm\sqrt{1+a}\in(-2;2)$, მაშინ არ მოიძებნება ასეთი x, აქედან გამომდინარე $a\geq 0$.
აქედან გამომდინარე, ვიღებთ შემდეგ პასუხებს:

$$x_{1,2}=\frac{1+\sqrt{1+a}\pm\sqrt{a+2\sqrt{1+a}-2}}{2}$$

და თუ $a\geq 8$, მაშინ ასევე ვიღებთ:

$$x_{3,4}=\frac{1-\sqrt{1+a}\pm\sqrt{a-2\sqrt{1+a}-2}}{2}$$

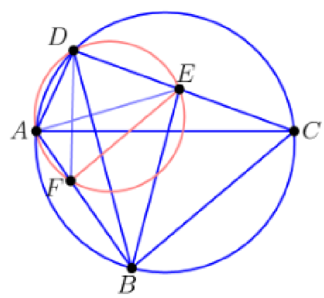
ამოცანა 5

ამოხსნა 1:

$\angle AFE = \angle ABC = 180^\circ - \angle ADE \implies ADEF$, ამასთანავე B არის AC რკალის შუაწერტილი, ანუ E არის AC-ს შუამართობზე $\implies AEC$ არის ტოლფერდა სამკუთხედი. ოთხკუთხედი არის ციკლური, მაშინ:

$$\angle FDB = \angle FDC - \angle BDC = \angle FAE - \angle FAC = \angle CAE = \angle ECA = \angle DBF$$

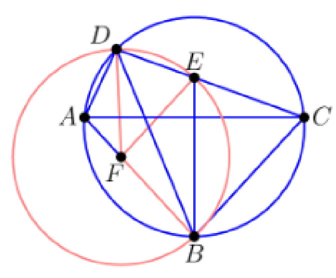
აქედან გამომდინარე DFB არის ტოლფერდა სამკუთხედი.



ამოხსნა 2:

რადგან $\overline{EF} \mid\mid \overline{BC}$, გვაქვს $\alpha = \angle FEB = \angle CBE = \angle EBF$, რაც გვაძლევს $FE = FB$, აქედან გამომდინარე საკმარისია ვაჩვენოთ რომ F არის BED-ზე შემოხაზული წრეწირის ცენტრი.

ახლა შევამჩნიოთ რომ $\angle BDC = \angle BAC = 90^\circ - \alpha = \frac{1}{2}\angle BFE$, და რადგან F არის ასევე EB-ს შუამართობზე ის იფიქსება და ვღებულობთ რომ არის ამ წრეწირის ცენტრი.



X-XII კლასის ამოცანები

ამოცანა 1

$(n-d)^2 = n^2 - 2nd - d^2$, შევამჩნიოთ რომ მარცხენა მხარეს სამივე წევრი იყოფა d-ზე, აქედან გამომდინარე მარჯვენა მხარეც უნდა გაიყოს d-ზე, ანუ $d \mid (n-d)^2 < 2d$, აქედან გამომდინარე $(n-d)^2 = 0$ ან d

$$(n-d)^2 = 0 \Longrightarrow n = d$$

$$(n-d)^2 = d = k^2 \Longrightarrow n = k^2 \pm k$$

აქედან გამომდინარე $(d,n) = (k,k); (k^2, k^2+k); (k^2, k^2-k)$, სადაც ბოლო პასუხი შესაძლებელია მხოლოდ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც $k > 1$.

ამოცანა 2

თუ $a = b$, მაშინ ეს ორი განტოლება გამოდის ერთნაირი, აქედან გამომდინარე მათ ნამრავლს ექნება მხოლოდ 2 ფესვი.

რადგან ნამრავლს უნდა ჰქონდეს 3 ფესვი, ამ ორ განტოლებას აქვთ საერთო ფესვი, ვთქვათ ეს არის α

$$0 = (\alpha^2 + \alpha b + a) - (\alpha^2 + \alpha a + b) = (a - b)(\alpha - 1)$$

რადგან $a \neq b$, გვაქვს რომ $\alpha = 1$. მაშინ:

$$x^2 + ax + b = (x - 1)(x - c) \qquad x^2 + bx + a = (x - 1)(x - d)$$

პირველზე ვიეტა გვაძლევს $a + b = -c + (c - 1) = -1$. ორივეზე ვიეტა გვაძლევს $c = b$ და $a = d$. აქედან გამომდინარე სამივე ფესვის ჯამი არის:

$$c + d + \alpha = a + b + 1 = -1 + 1 = 0$$

ამოცანა 3

ამოხსნა 1:

$\angle GEF = 180^\circ - \angle AEG - \angle AEB = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle EAG) - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BAE) = \frac{1}{2}\angle BAC$.

აქედან გამომდინარე უ.დ. $\angle FGC = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle DAC \Longrightarrow \overline{AD} \parallel \overline{GF}$.

შევამჩნიოთ, რომ $\Delta BAD = \Delta DAG \Longrightarrow BD = DG = DF$, ანუ ΔBGF არის მართკუთხა სამკუთხედი. რადგან BAG არის ტოლფერდა, $AD \perp BG \perp GF \Longrightarrow \overline{AD} \parallel \overline{GF}$.

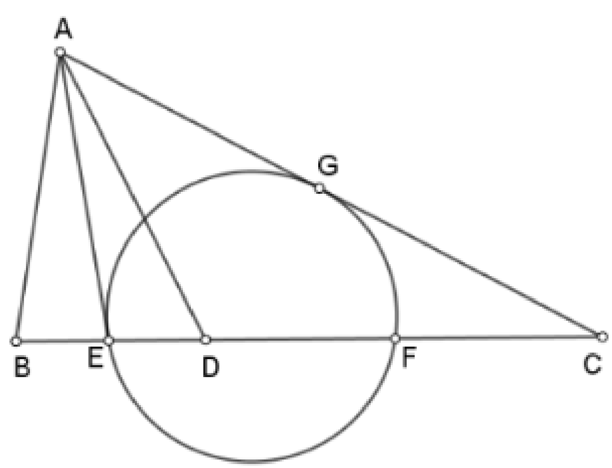
ამოხსნა 2:

$AB = c, AC = b, BC = a$ ახლა შევამჩნიოთ $BE = 2c\cos B$. კოსინუსების თეორემით:

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{a} = 2c\cos B = BE$$

აქედან გვაქვს:

$CF \cdot CE = (a - 2BD)(a - BE) = \frac{a(b-c)}{b+c} \cdot \frac{b^2-c^2}{a} = (b-c)^2 = CG^2$.



ამოცანა 4

ჩვენ ორნაირად ვაჩვენებთ რომ თამაშს მოიგებს ნიკა თუ n არის კენტი და მოიგებს თორნიკე თუ n არის ლუწი.

ამოხსნა 1:

თუ $n = 2k$, მაშინ თორნიკემ მის პირველ სვლაზე გააფერადოს ნიკას მეზობელი წვერო, ამის შემდეგ მაშინ გავავლოთ წარმოსახვითი წრფე l, რომელიცაა ამ ორი წვეროს შუამართობი. თუ ნიკამ გააფერადა რომელიღაც წვერო V, მაშინ თორნიკეს სტრატეგიაა გააფერადოს V-ს ანარეკლი l-ის მიმართ. ამის შემდეგ თუ ნიკამ გააფერადა წვერო რომლის მეზობლებიც იყვნენ A და B, მაშინ A' და B' იყვნენ მათი ანარეკლები l-ის მიმართ. თუ A ან B არიან გაფერადებული, მაშინ თორნიკეს სტრატეგიის მიხედვით მათი შესაბამისი ანარეკლებიც იქნებიან გაფერადებული, ანუ რა ქულასაც იწერს ნიკა მინიმუმ იგივეს იწერს თორნიკე და რადგან თორნიკე იწყებს მეტი ქულით, თორნიკე მოიგებს ამ შემთხვევაში.

თუ $n = 2k + 1$, მაშინ ნიკამ თავისი პირველი სვლის მერე გაავლოს წრფე l დიამეტრი, რომელიც გადის მის მიერ პირველ სვლაზე გავლებულ წერტილზე. ამის შემდეგ როგორც თორნიკე იქცევა ლუწ n-ზე, მანაც უნდა გააფერადოს ისეთი წვერო, რომლის ანარეკლიც გააფერადა თორნიკემ. ამასთანავე ნიკას ერთხელ უწევს გააფერადოს წვერო რომლის მეზობელიცაა მისი ანარეკლი l-ზე, აქედან გამომდინარე ის ამ სვლაზე აიღებს თორნიკეზე 1-ით მეტ ქულას და სტრატეგიის თანახმად დაამთავრებს თორნიკეზე მეტი ქულით.

ამოხსნა 2:

შევამჩნიოთ რომ თამაშის პირველ სვლაზე მოთამაშე არ იღებს ქულას, ხოლო ბოლო სვლაზე გარანტირებულად იღებს 2 ქულას. ასევე შეგვიძლია ნებისმიერ სვლაზე რომელიმე გაფერადებული წვეროს მეზობელი წვერო გავაფერადოთ და 1 ქულას ავიღებთ, ამით თითოეულ მოთამაშეს აქვს გარანტირებული 1 ქულა.

ვხედავთ რომ სამკუთხედზე ორივე მონაწილის ჯამი არის n. ინდუქციით დავუშვათ, რომ n-კუთხედზე ორივე მოთამაშის ქულების ჯამია n და გადავიდეთ $n+1$ კუთხედზე. ავიღოთ ბოლომდე გაფერადებული n კუთხედი, შევამჩნიოთ რომ სადაც არ უნდა დავამატოთ ერთი გაუფერადებელი წვერო, მივიღებთ $n+1$ კუთხედი ფიგურის ისეთ კონფიგურაციას, რომელის ბოლოს წინა სვლაზე მიიღწევა. ნებისმიერ ორს შორის ახალი წვეროს ჩამატება ორივე მოთამაშის ქულების ჯამს 1-ით შეამცირებს, მაგრამ ამ წვეროს გაფერადება ორით გაზრდის პირობის თანახმად, აქედან გამომდინარე მონაწილეების ქულების ჯამი გაიზარდა ერთით. ინდუქციის თანახმად ნებისმიერ n კუთხედზე ორივე მონაწილის ქულების ჯამი არის n.

თუ $n = 2k$, თითო მოთამაშეს უწევს k წვეროს გაფერადება. რადგან n ლუწია, თამაშს ამთავრებს თორნიკე, აქედან გამომდიანრე მინიმუმ ექნება $2+(k-1)=k+1$ ქულა, ხოლო ნიკას მაქსიმალური ქულა არის $n-(k+1)=k-1<k+1$, ანუ ლუწ n-ზე იგებს თორნიკე.

ანალოგიურად თუ $n=2k+1$, ნიკას უწევს $k+1$ წვეროს გაფერადება. ის ასევე იწყებს და ამთავრებს თამაშს, აქედან გამომდიანრე იღებს $2+(k-1)=k+1$ და თორნიკე იღებს $2k+1-(k+1)=k<k+1$ ქულას ანუ კენტ n-ზე იგებს ნიკა.

ამოცანა 5

ვაჩვენოთ რომ $\Delta AFR \, \Delta AEP$.

$$\frac{AR}{AP} = \frac{AB\sqrt{2}}{AC\sqrt{2}} = \frac{AB}{AC} = \frac{AF}{AE}$$

და

$$\angle FAR = \angle FAB - 45^\circ = \angle EAC - 45^\circ = \angle EAP$$

რაც მათი მსგავსობისთვის საკმარისია.

ამ ორი სამკუთხედის მსგავსებიდან გვაქვს $\angle YFC = \angle XEB$, ანუ წრეწირში რკალები BX და CY არიან ტოლები, აქედან გამომდინარე ეს ქორდებიც არიან ტოლები.