VII კლასის ამოცანები

ამოცანა 1

დავაკვირდეთ ლოკოკინების მოძრაობას შაბათს. რადგან რომეო ჯულიეტაზე ორჯერ უფრო სწრაფია, ამიტომ შეხვედრისას რომეოს მიერ განვლილი მანძილი ორჯერ მეტი იქნებოდა ვიდრე ჯულიეტას მიერ განვლილი მანძილი. ესე იგი რომეო გაივლიდა მათ სახლებს შორის მანძილის $\frac{2}{3}$ ნაწილს. კვირას კი რომეომ სრულად გაიარა სახლებს შორის მანძილი. ცხადია, სრული გზა 1,5-ჯერ მეტია თავის $\frac{2}{3}$ ნაწილზე და, შესაბამისად, რომეოც 1,5-ჯერ მეტ დრო დახარჯავდა კვირა დღეს ჯულიეტას სახლამდე მისვლაში, ვიდრე შაბათს ჯულიეტასთან შეხვედრის წერტილამდე მისვლისთვის დასჭირდა.

დინება პირველი ნავსადგურიდან მეორე ნავსადგურისკენ მიედინება. თუ გემის სიჩქარე მდგარ წყალში არის x კმ/სთ, მაშინ შაბათს მისი ხმელეთის მიმართ გადაადგილების სიჩქარე მდინარის დინების მიმართულებით იქნება $(x+3)$ კმ/სთ, ხოლო კვირას მისი ხმელეთის მიმართ გადაადგილების სიჩქარე მდინარის დინების საწინააღმდეგო მიმართულებით იქნება $(x-3)$ კმ/სთ. შესაბამისად, გვექნება შემდეგი განტოლება:

$$1.5(x-3) = x+3 \Longrightarrow x = 15$$

მივიღეთ, რომ გემის სიჩქარე მდგარ წყალში არის 15 კმ/სთ.

ამოცანა 2

პირობის თანახმად გვაქვს:

$$n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = 41^2 \Longrightarrow n(n+1)(n+2)(n+3) = 41^2-1^2 = 40 \cdot 42 = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$$

ანუ $(5, 6, 7, 8)$ აკმაყოფილებენ პირობას. რომ ავიღოთ უფრო დიდი 4 მომდევნო რიცხვი, მაშინ მათი ნამრავლი გამოვა ამ ოთხის ნამრავლზე მეტი, ანალოგიურად თუ ავიღებთ უფრო მცირეს. აქედან გამომდინარე $(5, 6, 7, 8)$ არიან ასეთი ერთადერთი მომდევნო რიცხვები.

ამოცანა 3

დავუშვათ საწინააღმდეგო და თითოეულმა აიღო განსხვავებული რაოდენობის თხილი. განვიხილოთ მინიმუმ ვის რამდენი თხილი ჰქონდა შეგროვებული.

რადგან ყველას განსხვავებული რაოდენობა ჰქონდა შეგროვებული და განვიხილავთ მინიმუმ რამდენს აიღებდნენ, მაშინ მათ უნდა შეეგროვებინათ $0, 1, 2, ..., 14$ თხილი შესაბამისად. მაგრამ მაშინ ჯამში გამოუვიდოდათ

$$0 + 1 + 2 + ... + 14 = 105 > 100$$

მაგრამ პირობის თანახმად ჯამში 100 ჰქონდათ შეგროვებული. აქედან გამომდინარე ჩვენი დაშვება, რომ სხვადასხვა რაოდენობის თხილი შეაგროვეს იყო არასწორი.

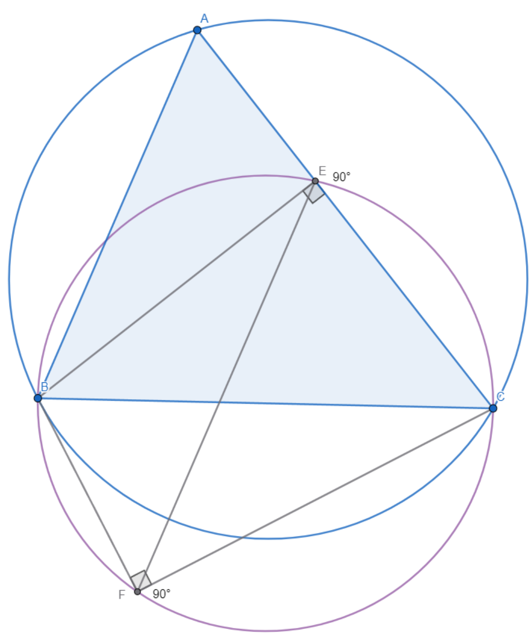
ამოცანა 4

რადგან სამკუთხედი BEC არის მართი, ისინი არიან წრეწირზე დიამეტრით BC. ანალოგიურად BCF-ზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრია BC. რადგან ამ ორ წრეწირს აქვთ ერთი და იგივე დიამეტრი ისინი უნდა იყვნენ ერთი და იგივე წრეწირი, აქედან გამომდინარე B, E, C, F წერტილები არიან ერთ წრეწირზე, დიამეტრით BC.

ამის შემდეგ რკალის ტოლობის და მხების თვისების გამო:

$$\angle FEC = \angle FBC = \angle BAC$$

ანუ EF და AB წრფეები ქმნიან ტოლ კუთხეებს AC წრფესთან, აქედან გამომდინარე ისინი არიან პარალელურები



VIII-IX კლასის ამოცანები

ამოცანა 1

დავუშვათ საწინააღმდეგო და არცერთს აქვს ნამდვილი ამონახსნი, ეს იმას ნიშნავს რომ სამივე განტოლების დისკრიმინანტი უარყოფითია. გადავნომროთ განტოლებები 1-დან 3-მდე და ჩამოვწეროთ სამივეს დისკრიმინანტი

$$D_1 = 4a^2 - 4b \quad D_2 = 4b^2 - 4a \quad D_3 = 4 - 4ab$$

რადგან სამივე დისკრიმინანტი უარყოფითია, მაშინ მათი ჯამიც უარყოფითია:

$$0 > D_1 + D_2 + D_3 = 4a^2 - 4b + 4b^2 - 4a + 4 - 4ab$$
$$0 > a^2 - a(1+b) - b + b^2 + 1$$

გვაქვს a-ს მიმართ კვადრატული განტოლება, საწყისი კოეფიციენტი თან დადებითი, აქედან გამომდინარე რადგან უარყოფითია დისკრიმინანტი უნდა ჰქონდეს დადებითი:

$$0 < D = (1+b)^2 - 4(b^2 - b + 1) = 1 + 2b + b^2 - 4b^2 + 4b - 4 = -3(b-1)^2 \leq 0$$

მივიღეთ $0 < 0$, რაც აბსურდია, აქედან გამომდინარე ჩვენი დაშვება, რომ არცერთ განტოლებას არ ჰქონდა ფესვი არის არასწორი

ამოცანა 2

ვთქვათ ეს რიცხვები არიან ზრდადობით დალაგებული $x \leq y \leq z$. თუ $x = 1$, მაშინ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > 1$$

თუ $x \geq 4$, მაშინ

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$$

აქედან გამომდინარე x უნდა იყოს ან 2 ან 3.
ჯერ განვიხილოთ $x = 2$:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y} \Longrightarrow 4 \geq y \geq 3$$

თუ $y = 3$, მაშინ $z = 6$. თუ $y = 4$, მაშინ $z = 4$.

ახლა თუ $x = 3$:

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq \frac{2}{y} \Longrightarrow 3 \geq y \geq x = 3 \Longrightarrow y = 3$$

რაც გვაძლევს $z = 3$
საბოლოოდ მივიღეთ შემდეგი სამეულები პასუხად: $(2, 4, 4); (2, 3, 6); (3, 3, 3)$

ამოცანა 3

რადგან ეს სამნიშნა რიცხვები იყოფიან 9-ზე, მაშინ 9-ზე გაყოფადობის წესით, მათი ციფრთა ჯამიც უნდა იყოფოდეს 9-ზე. ამასთანავე ჩვენ გვაქვს, რომ ამ სამნიშნა რიცხვის ციფრები არის კენტი. კენტი + კენტი + კენტი = კენტი, ანუ ციფრთა ჯამი უნდა იყოს კენტი 9-ის ჯერადი. ნებისმიერი სამნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი არ აღემატება 27-ს, აქედან გამომდინარე ჩვენი პირობისთვის დამაკმაყოფილებელი სამნიშნა რიცხვის ციფრთა ჯამი უნდა იყოს ან 9 ან 27.

როდესაც ციფრთა ჯამია 9:

რადგან ჩვენ შეგვიძლია გამოვიყენოთ მხოლოდ ციფრები $1, 3, 5, 7$, მის ჩანაწერში უნდა იყოს 1-იანი გამოყენებული, ან უნდა იყოს 333, წინააღმდეგ შემთხვევაში ციფრთა ჯამი აღემატება 9-ს. აქედან გამომდინარე ყველა ასეთი რიცხვი არის $333, 117, 135$ და მათ შიგნით ციფრების გადანაცვლებით მიღებული რიცხვები, რომელთა რაოდენობაცაა $1 + 3 + 6 = 10$ რიცხვი ჯამში.

როდესაც ციფრთა ჯამია 27 გვაქვს ერთადერთი კომბინაცია: 999.

აქედან გამომდიანრე სულ გვაქვს $10 + 1 = 11$ ასეთი სამნიშნა რიცხვი.

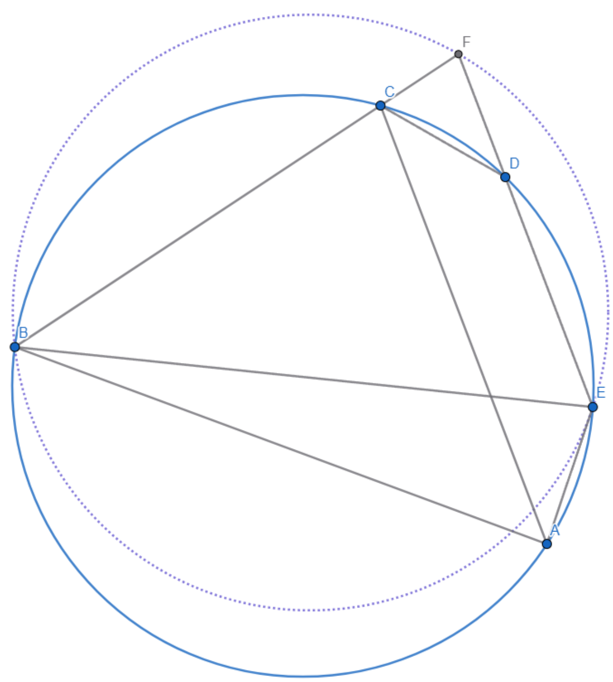
ამოცანა 4

რკალებისა და მხებობის თვისებების გამო:

$$\angle BFA = \angle BEA = \angle BCA$$

ანუ AC და EF წრფეები ქმნიან ტოლ კუთხეებს AB წრფესთან კვეთით, აქედან გამომდინარე ისინი არიან პარალელურები.

რადგან $CDEA$ არის ტრაპეცია, რომელზეც წრეწირი შემოიხაზება ის უნდა იყოს ტოლფერდა ტრაპეცია, ანუ $CD = AE$



X კლასის ამოცანები

ამოცანა 1

რადგან კვადრატული განტოლების გრაფიკი არ კვეთს x ღერძს, მისი დისკრიმინანტი უნდა იყოს უარყოფითი.

$$0 \geq D = b^2 - 4ac \Longrightarrow 4ac \geq b^2$$

აქედან გამომდინარე ვიღებთ:

$$a(2a+3b+6c) = 2a^2+3ab+6ac \geq 2a^2+3ab+\frac{3}{2}b^2 = \frac{1}{2}((2a+\frac{3}{2}b)^2+\frac{3}{4}b^2) \geq 0$$

ამოცანა 2

რადგან წილადი $\frac{al+b}{cl+d}$ იკვეცება რაღაც k-ზე, მნიშვნელიც და მრიცხველიც უნდა იყოფოდეს k-ზე.

$$k \mid al+b \quad\quad k \mid cl+d \Longrightarrow k \mid c(al+b) \quad\quad k \mid a(cl+d)$$

რადგან k ყოფს ამ ორ რიცხვს, მან უნდა გაყოს მათი სხვაობაც:

$$k \mid c(al+b) - a(cl+d) = ad - bc$$

ამოცანა 3

პასუხია $k=1$, რომელიც მიიღწევა მხოლოდ 1x1-ზე კვადრატის აღებით.

შევამჩნიოთ, რომ თუ გვაქვს kxk-ზე კვადრატი, მის შიგნით თუა მართკუთხედი 1xn-ზე მაშინ $n \leq k$, წინააღმდეგ შემთხვევაში ეს მართკუთხედი ვერ ჩაეტევა კვადრატში. აქედან გამომდინარე კვადრატის მაქსიმალური ფართობი იქნება ყველა ისეთი მართკუთხედის ჯამი, რომლის სიგრძეც ნაკლებია k-ზე. მაგრამ ჩვენ ასევე გვაქვს რომ ამ კვადრატის ფართობია k^2, აქედან გამომდინარე:

$$k^2 \leq 1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2} \Longrightarrow k \leq 1$$

ამოცანა 4

PQ-მ გადაკვეთოს AB M-ში. C და D იყოს PX-ისა და QX-ის შუაწერტილები შესაბამისად.

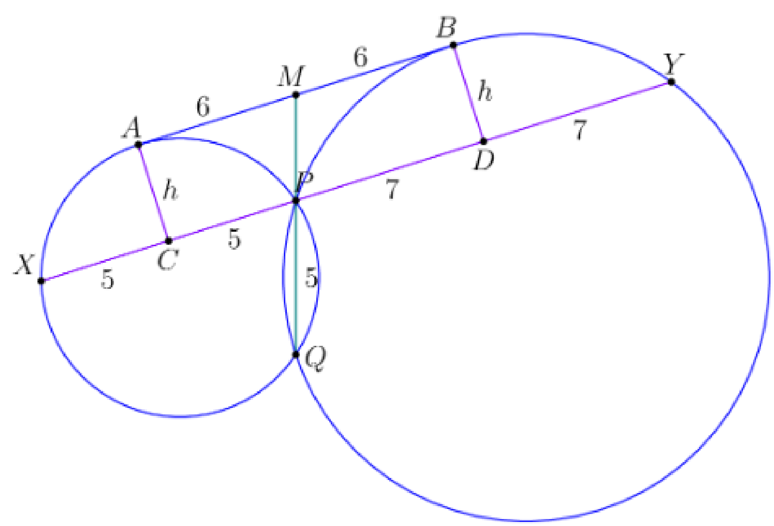
$$AB = PC + PD = \frac{1}{2}PX + \frac{1}{2}PY = 5 + 7 = 12$$

მკვეთის თვისებით:
$MA^2 = MP \cdot MQ = MB^2 \Longrightarrow MA = MB$
ანუ M არის AB-ს შუაწერტილი $\Longrightarrow MA = MB = \frac{1}{2}AB = 6$, ახლა ზევით დაბრუნებით ვიღებთ:

$$6^2 = MA^2 = MP \cdot MQ = MP(MP + 5) \Longrightarrow MP = 4$$

h-ით ავღნიშნოთ $XABY$-ის სიმაღლე. შევამჩნიოთ, რომ მანძილი P-დან AB-მდე არის ასევე h, აქედან გამომდინარე პითაგორას თეორემით გვაქვს $\sqrt{h^2 + 1} = MP = 4 \Longrightarrow h = \sqrt{15}$

$$S_{ABXY} = \frac{AB + XY}{2} \cdot h = \frac{12 + 24}{2} \cdot \sqrt{15} = 18\sqrt{15}$$



XI-XII კლასის ამოცანები

ამოცანა 1

სამივე ტოლობაში 1-იანის დამატებით ვიღებთ:

$$\frac{x+y+z}{z} = \frac{x+y+z}{y} = \frac{x+y+z}{x}$$

აქედან გამომდინარე ან $x+y+z=0$ ან $x=y=z$.
თუ $x+y+z=0$, მაშინ:

$$\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz} = \frac{(-z)(-x)(-z)}{xyz} = -1$$

რომელიც მიიღწევა, როდესაც $(x,y,z)=(2,-1,-1)$.
თუ $x=y=z$, მაშინ:

$$\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz} = \frac{8x^3}{x^3} = 8$$

რომელიც მიიღწევა, როდესაც $(x,y,z)=(1,1,1)$

ამოცანა 2

შევამჩნიოთ რომ $p = 2$ არ გამოდის, ანუ p არის კენტი. ვთქვათ სულ გვაქვს n ცალი ბლოკი და თითოეულ ბლოკში ჯამი არის S. $n = p$ გვაძლევს რომ ყველა რიცხვი ტოლია, რაც აბსურდია. აქედან გამომდინარე $1 < n < p$ მაშინ:

$$nS = 1 + 2 + ... + p = \frac{p(p+1)}{2}$$

მაგრამ, რადგან p არის კენტი, ის ყოფს $\frac{p(p+1)}{2} \Longrightarrow p \mid nS$. ($a \mid b$ იშიფრება, როგორც a ჰყოფს b -ს). რადგან $n < p$, p ვერ გაყოფს n-ს, აქედან გამომდიანრე $p \mid S$. ახლა დავხედოთ პირველ ბლოკს, ვთქვათ მისი სიგრძეა k, მაშინ:

$$p|S = 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

რადგან $n > 1$-ზე, ჩვენ გვაქვს რომ $k < p$. აქედან გამომდინარე p ვერ გაყოფს k-ს, ანუ მან უნდა გაყოს $k + 1$, მაგრამ რადგან $k < p$-ზე ვიღებთ რომ $k+1 = p \Longrightarrow k = p-1$. მაშინ გამოდის სულ 2 ცალი ბლოკი და მეორე ბლოკში არის მხოლოდ p, ანუ:

$$p = \frac{p(p-1)}{2} \Longrightarrow p = 3$$

რომელიც გამოდის ბლოკებით $[1, 2], [3]$-ის აღებით.

ამოცანა 3

შევამჩნიოთ რომ ამ ფიგურამ უნდა გააკეთოს 7 მარვენა მოძრაობა და 7 ზევით მოძრაობა და ამ სვლების ნებისმიერი კომბინაცია მიგვიყვანს ზედა მარჯვენა კუთხეში. აქედან გამომდინარე სულ მოუწევს 14 სვლის გაკეთება და ამ 14 სვლიდან უნდა ამოვარჩიოთ 7 სვლა რომელზეც ის გააკეთებს მარვენა სვლა, დანარჩენზე კი ზევით სვლას. ანუ ჩვენ გვაქვს 14-დან 7 სვლის ამორჩევის რაოდენობა, რაც არის $C_{14}^7 = 3432$

ამოცანა 4

$\angle A \equiv \alpha \quad \angle B = \beta \quad \angle C = \gamma$

H იყოს სიმაღლეების გადაკვეთის წერტილი. რადგან $\angle AEH = \angle AFH = 90^\circ$, ჩვენ გვაქვს რომ AH არის AEF სამკუთხედზე შემოხაზული წრეწირის დიამეტრი. მაგრამ AH არის სიმაღლე ABC სამკუთხედში, ანუ პერპენდიკულარულია BC-სი, აქედან გამომდინარე იქნება მართობი A-ში გავლებული BC წრფის პარალელურის და რადგან ის არის დიამეტრი, ვიღებთ რომ A-ში გავლებული BC-ს პარალელური წრფე არის მხები.

რადგან $\angle BFC = 90^\circ = \angle BEC$, გვაქვს რომ B, F, E, C არიან ერთწრფეზე, დიამეტრით BC, ანუ ცენტრია M.

$$\angle MFE = \angle MFC + \angle CFE = 90^\circ - \angle BFM + \angle EBC = 90^\circ - \beta + 90^\circ - \gamma = \alpha$$

ანუ MF ეხება ამ წრეწირს, ანალოგიურად ME-ც.

X იყოს AO-ს კვეთა EF-თან, მაშინ:

$$\angle AXE = 180^\circ - \angle OAC - \angle AEF = 180^\circ - (90^\circ - \beta) - (180^\circ - \angle FEC) = 90^\circ + \beta - \beta = 90^\circ$$